ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$1^{η}$ Δεκάδα

1.

Στην αρχή της σχολικής χρονιάς , οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των διακοπών τους . Τα δεδομένα φαίνονται στο διπλανό πίνακα

Αριθμός βιβλίων x_i	Αριθμός μαθητών $ν_i$
0	$α + 4$
1	$5α + 8$
2	$4α$
3	$α - 1$
4	$2α$
Σύνολο	50

i) Να βρείτε την τιμή του α

ii) Να βρείτε την μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων

iii) Να βρείτε την διάμεσο του αριθμού των βιβλίων

iv) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

v) Να βρείτε την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει το πολύ ένα βιβλίο

Προτεινόμενη λύση

i)

$α + 4 + 5α + 8 + 4α + α - 1 + 2α = 50 \quad \Leftrightarrow \quad α = 3$

ii)

Ο δοσμένος πίνακας γίνεται

Αριθμός βιβλίων x_i	Αριθμός μαθητών $ν_i$	$ν_i x_i$	$ν_i x_i^2$
0	7	0	0
1	23	23	23
2	12	24	48
3	2	6	18
4	6	24	96
Σύνολο	50	77	185

$$\bar{x} = \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{κ} ν_i x_i = \frac{77}{50} = 1{,}54$$

iii)

$$δ = \frac{25^{η}\ παρ + 26^{η}\ παρ}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

iv)

$$S^2 = \frac{1}{ν}\left\{ \sum_{i=1}^{κ} ν_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{κ} ν_i x_i\right)^2}{ν} \right\} = \frac{1}{50}(185 - \frac{77^2}{50}) \approx 1{,}33\ ,$$

Άρα $S = \sqrt{1{,}33} \approx 1{,}15$ και $CV = \dfrac{1{,}15}{1{,}54} \approx 0{,}75 = 75\% > 10\%$ όχι ομοιογενές

v) $\dfrac{7+23}{50} = \dfrac{3}{5}$

2.

Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σ’ έναν άξονα και η θέση του σε μέτρα συναρτήσει του χρόνου t σε sec δίνεται από την συνάρτηση

$$S(t) = \frac{2}{3}t^3 + \alpha t^2 + \beta t \quad \text{όπου } \alpha,\ \beta \text{ πραγματικές σταθερές .}$$

Αν την χρονική στιγμή t = 3sec το σώμα απείχε από την αρχή του άξονα 6 m και η στιγμιαία ταχύτητά του ήταν 8 m/sec , να βρείτε

i) Τις τιμές των α και β

ii) Για τις παραπάνω τιμές των α και β να βρείτε πότε το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο.

iii) Ποια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι ίσος με $4m/sec^2$;

Προτεινόμενη λύση

i)

Έχουμε ότι $S'(t) = 2t^2 + 2\alpha t + \beta \iff \upsilon(t) = 2t^2 + 2\alpha t + \beta$

Ισχύουν $S(3) = 6$ και $\upsilon(3) = 8 \iff 3\alpha + \beta = -4$ και $2\cdot 3^2 + 2\alpha\cdot 3 + \beta = 8$

$\beta = -4 - 3\alpha$ και $18 + 6\alpha + \beta = 8$

$\beta = -4 - 3\alpha$ και $6\alpha - 4 - 3\alpha = -10$

$\beta = -4 - 3\alpha$ και $6\alpha - 4 - 3\alpha = -10$

$\beta = -4 - 3\alpha$ και $3\alpha = -6$

$\beta = -4 - 3\alpha$ και $\alpha = -2$

$\beta = -4 - 3(-2)$ και $\alpha = -2$

$\beta = 2$ και $\alpha = -2$

ii)

$\upsilon(t) = 2t^2 - 4t + 2$, $\upsilon(t) = 0 \iff 2t^2 - 4t + 2 = 0 \iff t = 1sec$

iii)

$\upsilon'(t) = 4 \iff 4t - 4 = 4 \iff t = 2$ sec

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$, $x > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της f

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς τα ακρότατα

iii) Θεωρούμε ότι οι τιμές f(2), f(4), f(8), f(3), f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X

α) Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων , να δείξετε ότι

$R = 3 + \ln\frac{1}{4}$ και $\delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$

β) Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα . Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \{\lambda \in \Omega / R + \delta < -2\}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Πρόσημο της f ΄ και η μονοτονία της f :

x	0	2	+∞
f ΄	+	0	−
f	↗	|	↘

ii)

Βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο για x = 2 , το $f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$

iii)

Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$, οι δοσμένες τιμές σε αύξουσα σειρά είναι f(8), f(5), f(4), f(3), f(2) , τότε

α) $R = f(2) - f(8) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1 - \ln 8 + 4 - \lambda^2 + 6\lambda - 2$

$= \ln 2 - \ln 8 + 3$

$= 3 + \ln\frac{2}{8} = 3 + \ln\frac{1}{4}$ και $\delta = f(4) = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$

β) $R + \delta < -2 \Leftrightarrow 3 + \ln\frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2$

$3 + \ln 1 - \ln 4 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 < 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1, 5)$

Άρα $A = \{2, 3, 4\}$, οπότε $P(A) = \frac{3}{100}$

4.

Σ’ ένα δείγμα 50 ατόμων μιας πόλης, οι ηλικίες τους έχουν ομαδοποιηθεί στις κλάσεις [0, 20), [20, 40), [40 , 60), [60, 80), [80, 100) .

Οι γωνίες των κυκλικών τομέων στο κυκλικό διάγραμμα είναι ίσες με $86{,}4^o$, $115{,}2^o$, 108^o, 36^o, $14{,}4^o$ αντίστοιχα

i) Να κατασκευάσετε πίνακα της κατανομής με στήλες

ν_i , f_i , fi% , F_i% , $\nu_i x_i$, $\nu_i x_i^2$

ii) Να υπολογίσετε την μέση ηλικία των ατόμων του δείγματος και να δείξετε ότι η διακύμανση είναι ίση με 462,24.

iii) Να φτιάξετε το ιστόγραμμα των συχνοτήτων και των σχετικών αθροιστικών % συχνοτήτων και να υπολογίσετε την διάμεσο της κατανομής.

iv) Αν ο πληθυσμός της πόλης είναι 50000, να υπολογίσετε, με βάση το παραπάνω δείγμα, τον αριθμό των κατοίκων που είναι μικρότεροι των είκοσι ετών, καθώς επίσης και τον αριθμό των κατοίκων που είναι μεγαλύτεροι των 30 και μικρότεροι των 40 ετών .

v) Αν επιλέξουμε έναν κάτοικο στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να είναι μεγαλύτερος των 50 ετών ;

Προτεινόμενη λύση

i)

$\alpha_1 = 360^o f_1 \Leftrightarrow 86{,}4 = 360^o f_1 \Leftrightarrow f_1 = 0{,}24$

Οπότε $f_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu} \Leftrightarrow 0{,}24 = \dfrac{\nu_1}{50} \Leftrightarrow \nu_1 = 12$

Ομοίως $f_2 = 0{,}32$ $\nu_2 = 16$

$f_3 = 0{,}30$ $\nu_3 = 15$

$f_4 = 0{,}10$ $\nu_4 = 5$

$f_5 = 0{,}04$ $\nu_5 = 2$

Κλάσεις	Κεντ.τιμή xi	Συχν. νi	Σχ. σχ fi	Σχ.σχ % fi%	Αθ. σχ συχ Fi%	$\nu_i x_i$	$\nu_i x_i^2$
[0, 20)	10	12	0,24	24	24	120	1200
[20, 40)	30	16	0,32	32	56	480	14400
[40, 60)	50	15	0,30	30	86	750	37500
[60, 80)	70	5	0,10	10	96	350	24500
[80, 100)	90	2	0,04	4	100	180	16200
Σύνολο	———	50	1	100	———	1880	93800

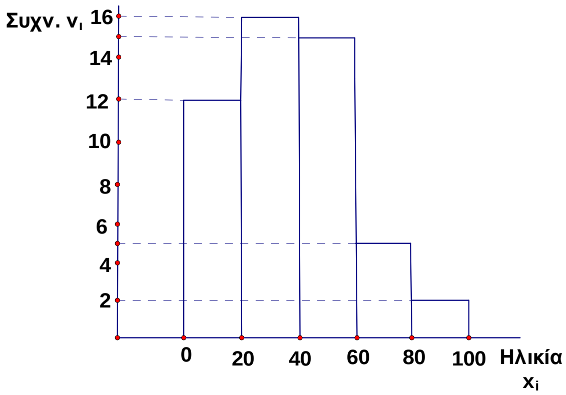
ii)

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i x_i = \frac{1880}{50} = 37{,}6 \text{ έτη}$$

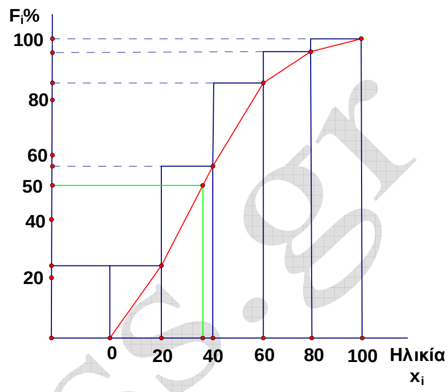
$$S^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i x_i\right)^2}{\nu}\right\} = \frac{1}{50}\left(93800 - \frac{1880^2}{50}\right) = 462{,}24$$

iii)

Ιστόγραμμα συχνοτήτων



Ιστόγραμμα και πολύγωνο Fi %



Η τιμή που αντιστοιχεί στο 50% και ισούται με την διάμεσο είναι $\delta \approx 35$ έτη .

iv)

Μικρότερο των 20 ετών είναι το 24% του δείγματος .

Αν το μέγεθος είναι 50000 , τότε κάτω των 20 ετών είναι :

$$50000 \cdot \frac{24}{100} = 12000 \quad \text{κάτοικοι}$$

Μεγαλύτερο από 30 και μικρότερο από 40 ετών είναι το μισό του 32% , δηλαδή το 16% . Αυτό αντιστοιχεί σε $50000 \cdot \frac{16}{100} = 8000$ κατοίκους

v)

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με : $\frac{1}{2} \cdot 30 + 10 + 4 = 29\%$

5.

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B είναι ίσες με τις τιμές του x στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο .

i) Δείξτε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

ii) Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$ και $P(B)$, καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$,
να βρείτε τις πιθανότητες
$P(A \cap B)$, $P(A - B)$, $P(A \cup B)'$, $P[(A - B) \cup (B - A)]$, $P(A' \cup B')$

Προτεινόμενη λύση

i)

$f\,'(x) = 6x^2 - 5x + 1$

$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$

Πρόσημο της f ′ και μονοτονία της f :

x	$-\infty$		1/3		1/2		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Από τον άξονα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = \frac{1}{3}$

και τοπικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$.

Οπότε $P(B) = \frac{1}{3}$ και $P(A) = \frac{1}{2}$

ii)

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$

  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

- $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

- $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

- $$\begin{aligned} P(A' \cup B') &= P(A') + P(B') - P(A' \cap B') \\ &= P(A') + P(B') - [P(A') - P(A' \cap B)] \\ &= P(A') + P(B') - P(A') + P(A' \cap B) \\ &= P(B') + P(B) - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

6.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = [P(A) - P(B)]x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, όπου και A , B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με τις ιδιότητες :

1) Όταν πραγματοποιείται το A, πραγματοποιείται και το B
2) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
3) $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$

ii) Να εξετάσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

α) Πραγματοποιείται μόνο το B

β) Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A , B

Προτεινόμενη λύση

i)

Η φράση: Όταν πραγματοποιείται το A πραγματοποιείται και το B , σημαίνει $A \subseteq B$

Τότε $A \cap B = A$, οπότε $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{4}$ και

$A \cup B = B$, οπότε $P(A \cup B) = P(B) = \frac{3}{4}$

Άρα $f(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$

ii)

$f'(x) = -x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f ΄	+	0	−
f	↗	|	↘

Βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 3$, το $f(3) = \frac{7}{2}$

iii)

α) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

β) $P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

7.

Στο διπλανό πίνακα χάθηκαν δύο συχνότητες .

x_i	ν_i
1	5
2	4
3	……
4	…….
5	1

Αν γνωρίζεται ότι $\bar{x} = \frac{7}{3}$ και $S^2 = \frac{14}{9}$,

i) Να βρείτε τις συχνότητες που χάθηκαν

ii) Να βρείτε την διάμεσο της κατανομής

iii) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $\nu_3 = \kappa$ και $\nu_4 = \lambda$, τότε $\bar{x} = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 4 + 3\kappa + 4\lambda + 5\cdot 1}{10+\kappa+\lambda}$

$$\frac{7}{3} = \frac{18 + 3\kappa + 4\lambda}{10+\kappa+\lambda}$$

$$2\kappa + 5\lambda = 16 \qquad \textbf{(1)}$$

$$S^2 = \frac{14}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{14}{9} = \frac{5\left(1-\frac{7}{3}\right)^2 + 4\left(2-\frac{7}{3}\right)^2 + \kappa\left(3-\frac{7}{3}\right)^2 + \lambda\left(4-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(5-\frac{7}{3}\right)^2}{10+\kappa+\lambda}$$

$$10\kappa - 11\lambda = 8 \qquad \textbf{(2)}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) , (2) βρίσκουμε $\kappa = 3$ και $\lambda = 2$

ii)

Ο δοσμένος πίνακας γίνεται

x_i	ν_i
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
Σύνολο	15

$\delta = 8^{\eta}$ παρατήρηση = 2

iii)

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{14}{9}}}{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \approx 0{,}53 = 53\% > 10\% \,,$$

το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

8.

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x+1, & \alpha\nu\ \ x\neq 1\\ 3, & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}\ ,\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x-\beta}{x+2}, & \alpha\nu\ x\in[0,2)\cup(2,+\infty)\\ 4, & \alpha\nu\ \ x=2\end{cases}$$

i) Να βρείτε τα α και β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=1$ και η g να είναι συνεχής στο $x=2$.

ii) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)(x+2)+7}{x^2-1}$$

iii) Αν A, B είναι όχι αδύνατα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, , με $A\cup B\neq\Omega$, $A\cap B\neq\varnothing$, $P(A\cup B)\neq P(A\cap B)$ και οι πιθανότητες $P(A\cup B)$, $P(\Omega)$, $P(A\cap B)$, $P(\varnothing)$ είναι στοιχεία του συνόλου

$$\left\{f\left(\frac{1}{4}\right),\ g\left(-\frac{2}{3}\right),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ g\left(-\frac{2}{5}\right),\ g(1)\right\}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A\cup B)$, $P(\Omega)$, $P(A\cap B)$, $P(\varnothing)$

β) Να βρείτε τη διάμεσο και τη μέση τιμή αυτών

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+1=3\\ \dfrac{2\alpha-\beta}{4}=4\end{cases}\Leftrightarrow\ \alpha=6\ \text{ και }\ \beta=-4$

Τότε $f(x)=\begin{cases}6x^2-4x+1 & \alpha\nu\ \ x\neq 1\\ 3 & \alpha\nu\ \ x=1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{6x+4}{x+2} & \alpha\nu\ x\in[0,2)\cup(2,+\infty)\\ 4 & \alpha\nu\ \ x=2\end{cases}$

ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)(x+2)+7}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-4x+1-\dfrac{6x+4}{x+2}(x+2)+7}{x^2-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-4x+1-6x-4+7}{x^2-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-10x+4}{x^2-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(6x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{6x-4}{x+1}=1\end{aligned}$$

iii)

α) Είναι $f\left(\frac{1}{4}\right) = 6\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{8}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{6\cdot\frac{-2}{3}+4}{-\frac{2}{3}+2} = 0\,,\qquad g\left(-\frac{2}{5}\right) = 1,\qquad g(1) = \frac{10}{3}$$

Αφού $\frac{10}{3} > 1$, το $\frac{10}{3}$ δεν είναι κάποια πιθανότητα .

Γνωρίζουμε ότι $P(\varnothing) = 0$ και $P(\Omega) = 1$

Επειδή $A\cap B \subseteq A\cup B$, θα είναι $P(A\cap B) \le P(A\cup B)$

άρα $P(A\cap B) = \frac{3}{8}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

β) Η διάμεσος είναι : $\delta = \dfrac{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{16}$

και η μέση τιμή είναι : $\overline{x} = \dfrac{0+1+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}}{4} = \frac{15}{32}$

9.

Σε μία επιχείρηση εργάζονται άνδρες και γυναίκες . Ο μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων είναι 1800 ευρώ. Ο μέσος μισθός των ανδρών είναι 2000 ευρώ και των γυναικών 1500 ευρώ .Να βρείτε :

i) Ποιο ποσοστό των υπαλλήλων της επιχείρησης είναι άνδρες και ποιο ποσοστό γυναίκες .

ii) Αν οι υπάλληλοι της επιχείρησης είναι 500 να βρείτε πόσοι είναι οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες .

iii) Επιλέγοντας έναν υπάλληλο στην τύχη να βρείτε την πιθανότητα να είναι γυναίκα

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω κ το πλήθος των ανδρών και λ το πλήθος των γυναικών.

Τότε το σύνολο των υπαλλήλων είναι κ + λ

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ οι μισθοί των ανδρών , τότε $2000 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\kappa}{\kappa}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\kappa = 2000\kappa$ **(1)**

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda$ οι μισθοί των γυναικών , τότε $1500 = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\lambda}{\lambda}$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\lambda = 1500\lambda$ **(2)**

Αλλά $1800 = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\kappa) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\lambda)}{\kappa + \lambda} \overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$

$$1800 = \frac{2000\kappa + 1500\lambda}{\kappa + \lambda}$$

$$18 = \frac{20\kappa}{\kappa + \lambda} + \frac{15\lambda}{\kappa + \lambda} \quad \textbf{(3)}$$

Αν α % είναι το ποσοστό των ανδρών υπαλλήλων και γ % το ποσοστό των γυναικών , τότε $\dfrac{\kappa}{\kappa + \lambda} = \dfrac{\alpha}{100}$ και $\dfrac{\lambda}{\kappa + \lambda} = \dfrac{\gamma}{100}$

Οπότε η (3) γίνεται $18 = 20 \cdot \dfrac{\alpha}{100} + 15 \cdot \dfrac{\gamma}{100}$

$$18 = 4 \cdot \frac{\alpha}{20} + 3 \cdot \frac{\gamma}{20}$$

$$4\alpha + 3\gamma = 360 \quad \textbf{(4)}$$

Ακόμα είναι $\alpha + \gamma = 100$ **(5)**

Λύνοντας το σύστημα των (4), (5) βρίσκουμε $\alpha = 60$ και $\gamma = 40$

Συνεπώς το 60% είναι άνδρες και το 40% γυναίκες

ii)

Αν οι υπάλληλοι είναι 500 , τότε οι άνδρες είναι : $\frac{60}{100}\cdot 500 = 300$

και οι γυναίκες προφανώς 200

iii) 40 %

10.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln[(x^2 + 1)^2] + \alpha x + \beta$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού αυτής

ii) Να βρείτε την $f'(x)$

iii) Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η ευθεία $y = 21x + 35$ να είναι εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(0,\ f(0))$.

iv) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης, όταν το $x = -1$ και $\alpha = 21$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει : $(x^2+1)^2 > 0$ πράγμα που ισχύει πάντα, άρα $A = \mathbb{R}$

ii)

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left[\left(x^2+1\right)^2\right]' + \alpha = \frac{1}{(x^2+1)^2}2(x^2+1)(x^2+1)' + \alpha$$

$$= \frac{1}{x^2+1}2\cdot 2x + \alpha$$

$$= \frac{4x}{x^2+1} + \alpha$$

iii)

Πρέπει να ισχύουν $f'(0) = 21$ και $f(0) = 35$

$$\frac{4\cdot 0}{0^2+1} + \alpha = 21 \quad \text{και} \quad \ln[(0^2 + 1)^2] + \alpha\cdot 0 + \beta = 35$$

$$\alpha = 21 \quad \text{και} \quad \beta = 35$$

iv) $f'(-1) = \frac{4(-1)}{(-1)^2+1} + \alpha = \frac{-4}{2} + 21 = -2 + 21 = 19$